PD Emanuel Scheidegger
B. Sc. Thomas Spittler
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Funktionentheorie II
WS 17/18

Übungsblatt 11

Dirichlet–Charaktere und Modulformen für Kongruenzgruppen

41. Die Euler–Relation und das Lemma von Gauss

Es seien p eine ungerade Primzahl and $a \in \mathbb{Z}$, so dass $\mathrm{ggT}(a,p) = 1$, und $\left(\frac{a}{p}\right)$ das Legendre–Symbol.

(a) (2 Punkte) Zeigen Sie die Euler–Relation $\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \bmod p$.
Verwenden Sie dazu den kleinen Satz von Fermat, der besagt, dass für eine Primzahl p und eine ganze Zahl a gilt: $a^p \equiv a \bmod p$.

(b) (2 Punkte) Betrachten Sie die ganzen Zahlen $a, 2a, 3a, \ldots, \frac{p-1}{2}a$ und deren kleinsten positiven Reste modulo p. Es sei n die Anzahl dieser Reste, die grösser als $\frac{p}{2}$ sind. Dann gilt das Lemma von Gauss: $\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^n$.
Betrachten Sie dazu das Produkt $Z = a \cdot 2a \cdot \cdots \cdot \frac{p-1}{2}a$ und werten Sie es auf zwei Arten modulo p aus. Verwenden Sie dazu (a).

42. Dirichlet–Charaktere

Es sei $G_N = \mathbb{Z}_N^\times$ die multiplikative Gruppe der Einheiten im Ring $\mathbb{Z}_N = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. Ein Dirichlet–Charakter modulo N ist ein multiplikativer Gruppenhomomorphismus $\chi : G_N \to \mathbb{C}^\times$. Wir erweitern χ zu einer Funktion $\widetilde{\chi} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ durch $\widetilde{\chi}(n) = 0$, falls $\mathrm{ggT}(n,N) \neq 1$, und $\widetilde{\chi}(n) = \chi(n \bmod N)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Die Funktion $\widetilde{\chi}$ wird ebenfalls als Dirichlet–Charakter bezeichnet und die Tilde wird weggelassen.

Zeigen Sie folgende Eigenschaften des Dirichlet–Charakters:

(a) (1 Punkt) $\chi(mn) = \chi(m)\chi(n)$ für alle $m, n \in \mathbb{Z}$.

(b) (1 Punkt) Wenn $\mathrm{ggT}(a,N) = 1$, dann ist $\chi(a)$ eine $\phi(N)$-te Einheitswurzel, wobei $\phi(N)$ die Euler–Funktion ist.

(c) (1 Punkt)

$$\sum_{n=0}^{N-1} \chi(n) = \begin{cases} \phi(N) & \chi = 1 \\ 0 & \chi \neq 1 \end{cases}$$

wobei 1 den trivialen Charakter $1(n) = 1$, $n \in \mathbb{Z}$, bezeichne.

(d) (1 Punkt) Das Legendre–Symbol $a \mapsto \left(\frac{a}{p}\right)$ ist ein Dirichlet–Charakter modulo p.
Verwenden Sie dazu Aufgabe 41(a)

43. Die Schranke von Sturm
(4 Punkte) Es sei $\Gamma \subset \Gamma_1$ eine Kongruenzgruppe vom Index N und $f \in M_k(\Gamma)$. Zeigen Sie, dass $f \equiv 0$, falls $\nu_\infty(f) > N\frac{k}{12}$.

44. Eine Modulform für $\Gamma_0(4)$ als η–Quotient

(a) (1 Punkt) Benutzen Sie das Resultat aus Aufgabe 17(b) um zu zeigen, dass

$$(\eta(\tau)\eta(2\tau))^8 \in S_8(\Gamma_0(2)).$$

(b) (1 Punkt) Es sei $f(\tau)$ eine Funktion mit Periode 1, die $f\left(-\frac{1}{4\tau}\right) = (-4\tau^2)^{\frac{k}{2}} f(\tau)$ für gerades k erfüllt. Zeigen Sie, dass $f|_k\gamma = f$ für alle $\gamma \in \Gamma_0(4)$.

(c) (2 Punkte) Benutzen Sie Aufgabe (a) und (b), sowie Aufgabe 33 um zu zeigen, dass

$$\frac{\eta(4\tau)^8}{\eta(2\tau)^4} \in M_2(\Gamma_0(4))$$

und bestimmen Sie ihren Wert an jeder Spitze.

Abgabetermin: Dienstag, 23. 1. 2018 um 10:00 Uhr.